

- 2 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 (II)(第六版). 北京: 高等教育出版社, 2002: 109~110
- 3 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学 (上册). 北京: 北京大学出版社. 1982: 188~191, 211~213

- 4 王侃, 任革学, 李俊峰等. 关于刚体角速度定义的一个注解. 力学与实践, 2007, 29(1): 71~72
- 5 李海龙, 水小平. 一种引出一般刚体角速度概念的新方法. 力学与实践, 2007, 29(1): 73~74

## 刚体绕平行轴转动动量矩求解方法的分析

周 岭<sup>1)</sup>

(塔里木大学农业工程学院, 新疆阿拉尔 843300)

**摘要** 从“质点系相对其质心动量矩”的概念, 分析了质点系相对其质心绝对动量矩等于其相对动量矩的满足条件. 从“刚体平面运动的合成”的概念得到一种新的求解方法: “ $L_o = L_e + L_r$ ”, 即刚体绕平行轴转动对某点绝对动量矩等于刚体作牵连运动对该点动量矩与刚体相对质心转动产生动量矩的矢量和, 为学生较好理解“刚体绕平行轴转动动量矩”的求解提供了新思路.

**关键词** 刚体, 平行轴, 平面运动, 牵连运动, 质心

### 引 言

刚体运动分单刚体与多刚体运动系统, 刚体绕平行轴转动是多刚体运动系统的一种. 行星轮机构即是常见的刚体绕平行轴的运动系统, 其行星轮围绕两平行轴转动, 它的运动是两种转动(公转和自转)的合成, 即作平面运动. 求解这类系统对某点的动量矩是相对复杂的问题, 本文就是针对该系统对某点动量矩的求解方法做一探讨.

### 1 如何理解“质点系相对其质心动量矩”

理论力学教材中,  $L_o = L_C + r_C \times mV_C$ , 该公式体现了质点系相对其质心动量矩绝对关系, 同时隐含了  $L_C = L'_C$  的条件, 其中  $L_C$  是指质点系相对其质心的绝对动量矩,  $L'_C$  质点系相对其质心的相对动量矩, 理解这两个量相等关系是利用“质点系相对其质心动量矩”求解问题的关键, 下面利用单刚体与多刚体运动系统分别说明  $L_C = L'_C$ .

#### 1.1 单刚体系统

轮子的纯滚动或又滚又滑是最典型的单刚体运动系统, 在每一瞬时, 其平面图形都具有唯一的角速度, 该角速度就是刚体围绕质心转动的绝对角速度, 也是相对在质心  $C$  处建立平移参考系  $x'y'z'$  ( $x'y'z'$  方向始终与惯性坐标系保持平行) 的相对角速度<sup>[1]</sup>.

#### 1.2 多刚体系统

如图 1, 该系统为杆件与圆盘构成的多刚体系统. 圆盘随  $OC$  杆转动, 同时还围绕其质心转动, 因此圆盘的绝对运动是两种转动的合成.

将动系建立在  $OC$  杆上,  $OC$  做牵连运动, 牵连角速度为  $\omega_e$ , 轮围绕其质心做相对运动, 相对角速度为  $\omega_r$ , 则动点  $i$  的绝对角速度  $\omega_a = \omega_e + \omega_r$ ; 在  $C$  点处固结平移参考系  $x'y'z'$ , 可以理解为该参考平面的运动就是轮  $C$  平面图形的运动, 此处  $P$  点是参考平面的瞬心, 则轮  $C$  上的动点  $i$  绝对角速度是围绕  $P$  转动的角位移  $\omega'$ . 刚体上同一点绝对角速度是唯一的, 因此,  $\omega_a = \omega'$ , 即  $L_C = L'_C$

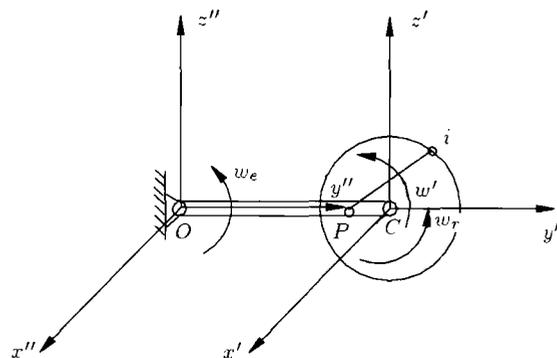


图 1 杆件与圆盘构成的多刚体系统示意图

### 2 “刚体平面运动合成”与对某点动量矩的关系

在运动学中, 分析复杂运动刚体上各点的运动参量时, 相对不同的参考系建立 3 种运动: 绝对运动、牵连运动、相对运动. 如图 1, 在  $OC$  杆上建立动系  $x''y''z''$ , 动系  $x''y''z''$  所作的就是牵连运动. 轮子的绝对运动可以分解为随  $x''y''z''$  围绕  $O$  的转动以及围绕质心  $C$  的相对转动.

3 种运动对转轴动量矩的关系为

$$L_o = L_e + L_r \quad (1)$$

$L_o$  是指刚体对某点绝对动量矩,  $L_e = J_o \omega_e$ , 是指刚体做牵连运动时对该点的动量矩 ( $J_o$  为刚体对  $O$  轴的转动惯量)  $L_r = J_C \omega_r$ , 是指刚体相对运动对其质心的动量矩 ( $J_C$  为刚体对质心  $C$  的转动惯量), 式 (1) 表述: 绕平行轴转动的刚体对某点动量矩等于刚体做牵连运动时对该点的动量矩与刚

2007-07-10 收到第 1 稿, 2007-12-13 收到修改稿.

1) E-mail: zhouling690@taru.edu.cn

体相对其质心转动对其质心动量矩的代数和。(由于是围绕平行轴转动,  $L_e, L_r$  是平行矢量, 因此为代数和)

### 3 举例说明两种方法的应用

如图 2, 在该系统中,  $OC$  杆重  $m_1$ , 杆长  $L$ , 围绕  $O$  轴做定轴转动, 角速度为  $\omega_o$ , 杆与轮  $C$  铰链连接, 轮重  $m_2$ , 半径为  $r$ , 在弧形轨道做纯滚动, 求该系统对  $O$  轴的动量矩.

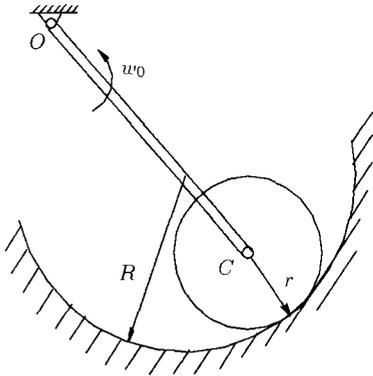


图 2 多刚体系统示意图

运动分析:  $OC$  杆围绕  $O$  轴以  $\omega_o$  做逆时针定轴转动, 轮  $C$  随  $OC$  杆围绕  $O$  轴转动, 同时受摩擦作用, 在弧形轨道做纯滚动与相对质心旋转方向为顺时针. 该刚体系统对  $O$  点的动量矩等于  $OC$  杆与轮  $C$  对该点动量矩的代数和, 如图 3.

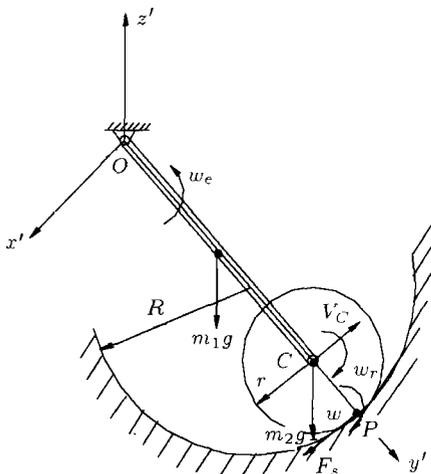


图 3 系统受力分析示意图

解: (1) 利用“质点系相对其质心动量矩”概念求解

$$L_o = L_{杆} + L_{轮}$$

因为杆做定轴转动, 所以  $L_{杆} = J_{O_{杆}}\omega_o$ ,  $J_{O_{杆}} = 1/3m_1L^2$ , 即  $L_{杆} = 1/3m_1L^2\omega_o$ .

方向由右手螺旋法则判断,  $L_{杆}$  垂直纸面向外, 规定为正.

又因为轮子做纯滚动,  $P$  为瞬心, 则其对  $O$  轴动量矩由公式  $L_o = L_c + r_c \times mV_C$  确定,  $L_c = J_C\omega$  ( $\omega$  为轮子转动的绝对角速度为顺时针), 用右手螺旋法则判断,  $L_c$  垂直纸面向里, 规定为负.

$$L_{轮} = L_c + r_c \times mV_C$$

$$L_{轮} = -L_c + r_c \times m_2V_C$$

$$V_C = \omega_o L = \omega_r \text{ 即 } \omega = \omega_o L/r$$

$$r_c = L, J_C = 1/3m_2r^2$$

所以  $L_{轮} = -1/3m_2\omega_o Lr + m_2\omega_o L^2$ . 则得到:  $L_o = 1/3m_1L^2\omega_o - 1/3m_2\omega_o Lr + m_2\omega_o L^2$ .

(2) 利用“刚体平面运动合成”概念解题

$$L_o = L_{杆} + L_{轮}$$

$L_{杆} = 1/3m_1L^2\omega_o$ , 正负判断同 (1).

根据式 (1):  $L_{轮} = L_e + L_r$

$$L_e = J_o\omega_e,$$

因为  $J_o = J_c + m_2L^2$ ,  $J_c = 1/3m_2r^2$

所以  $J_o = (1/3m_2r^2 + m_2L^2)\omega_e$ , ( $\omega_e = \omega_o$ )

$$\text{即 } L_e = (1/3m_2r^2 + m_2L^2)\omega_o$$

$$L_r = J_C\omega_r$$

因为  $\omega = \omega_o L/r = \omega_r - \omega_e$ <sup>[1]</sup>

所以  $\omega_r = \omega + \omega_e = \omega_o L/r + \omega_o$

$$\text{即 } L_r = 1/3m_2r^2(\omega_o L/r + \omega_o)$$

$$\text{则 } L_{轮} = (1/3m_2r^2 + m_2L^2)\omega_o - 1/3m_2r^2(\omega_o L/r + \omega_o) = m_2L^2\omega_o - 1/3m_2\omega_o Lr$$

由此得到:  $L_o = 1/3m_1L^2\omega_o - 1/3m_2\omega_o Lr + m_2L^2\omega_o$ .

### 4 结 论

(1) 用上述两个概念解题, 解题思路完全不同, 这有利于学生对《理论力学》知识有个系统的认识与总结;

(2) 利用“质点系相对其质心动量矩”概念求解, 关键是针对不同的运动系统透彻理解  $L_C = L'_C$ ;

(3) 掌握“刚体平面运动合成”概念, 理解动系对刚体运动的牵连作用, 用公式:  $L_o = L_{杆} + L_{轮}$  进行解题, 思路较清晰明了.

### 参 考 文 献

1 洪嘉振, 杨长俊. 理论力学 (第 2 版). 北京: 高等教育出版社,